

DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions 1) à 5) suivantes sont indépendantes.

- 1) Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de :
 - a) $\binom{n}{2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} - \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} \right)$.
 - b) $\frac{\ln(2^n + n^2)}{n^\alpha + \ln n}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- 2) Soient $x_1, \dots, x_n < 0$ distincts avec $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On pose $Q = (X - x_1) \dots (X - x_n)$. La décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$ sur \mathbb{R} s'écrit $\frac{P}{Q} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X - x_k}$ pour certains $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n a_k = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^x \frac{P(t)}{Q(t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} - \sum_{k=1}^n \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} \ln |x_k|,$$
 ce qu'on note aussi $\int_0^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = - \sum_{k=1}^n \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} \ln |x_k|$.
- 3) Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 = f^3$. Sans utiliser le lemme de décomposition des noyaux, montrer que $E = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ et exprimer $\operatorname{Im} f^2$ comme un noyau.
- 4) Montrer que l'application $P \mapsto P(X) + P'(1 - X)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- 5) a) Le polynôme $X^3 - 3X + 1$ est-il irréductible sur \mathbb{R} ? Et sur \mathbb{Q} ?
 b) Calculer la factorisation irréductible de $X^4 + 1$ sur \mathbb{R} et montrer que $X^4 + 1$ est irréductible sur \mathbb{Q} .

2 En 1969, le mathématicien britannique John Erdos — rien à voir avec le célèbre Hongrois Paul Erdős (1913-1996) — a montré que tout endomorphisme non bijectif d'un espace vectoriel de dimension finie est un produit de projecteurs. Le théorème est prouvé en deux temps dans les parties C et D de ce problème. Sa preuve repose sur un résultat général de décomposition des espaces vectoriels qui est l'objet de la partie B. La partie A est techniquement indépendante des suivantes. On y étudie le nombre minimal de projecteurs requis par le théorème d'Erdos.

Dans tout le problème, \mathbb{K} est un corps quelconque.

Partie A – Minoration du nombre de projecteurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

- 1) a) Montrer que pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$: $\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$. On admet par la suite que le résultat reste vrai pour un nombre fini quelconque d'endomorphismes.
 b) Montrer que pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$: $\operatorname{rg}(uv) \leq \operatorname{rg}(u)$ et $\operatorname{rg}(uv) \leq \operatorname{rg}(v)$.
- 2) Soient p_1, \dots, p_r des projecteurs de E .
 - a) Au moyen d'un télescopage, montrer que $\operatorname{rg}(\operatorname{Id}_E - p_1 \dots p_r) \leq \operatorname{rg}(\operatorname{Id}_E - p_1) + \dots + \operatorname{rg}(\operatorname{Id}_E - p_r)$, puis en déduire que $\operatorname{rg}(\operatorname{Id}_E - p_1 \dots p_r) \leq r(\dim E - \operatorname{rg}(p_1 \dots p_r))$.
 - b) Que vaut la composée $p_1 \dots p_r$ si elle est bijective?

Le résultat de la question 2)a) montre que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ non bijectif et tout $r \in \mathbb{N}^*$, si u est un produit de r projecteurs, alors $r \geq \frac{\operatorname{rg}(\operatorname{Id}_E - u)}{\dim E - \operatorname{rg}(u)}$. La réciproque est vraie, mais elle est plus fine que le théorème d'Erdos lui-même et ne sera pas démontrée ici.

Partie B – Les sous-espaces cycliques sont partout!

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, on appelle *sous-espace u -cyclique de E engendré par x* le sous-espace vectoriel $\langle x \rangle_u = \operatorname{Vect}(u^i(x))_{i \in \mathbb{N}} = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ de E .

- 3) a) Montrer que $\langle x \rangle_u$ est stable par u pour tout $x \in E$.

- b) Soit $x \in E$ non nul. Justifier l'existence d'un entier $m(x) \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la famille $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{m(x)-1}(x))$ est une base de $\langle x \rangle_u$.
 - c) Justifier l'existence d'un vecteur non nul $a \in E$ pour lequel $m(x) \leq m(a)$ pour tout $x \in E$ non nul.
- 4) On pose $d = m(a)$.
- a) Justifier l'existence d'une forme linéaire φ de E pour laquelle $\varphi(u^i(a)) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, d-2 \rrbracket$ d'une part et $\varphi(u^{d-1}(a)) = 1$ d'autre part.
- On pose $B = \bigcap_{i=0}^{d-1} \text{Ker}(\varphi \circ u^i)$.
- b) Montrer que B est un sous-espace vectoriel de E stable par u .
 - c) Montrer que $\langle a \rangle_u$ et B sont en somme directe.
 - d) Montrer enfin que $E = \langle a \rangle_u \oplus B$.
- 5) Justifier l'existence de vecteurs non nuls $a_1, \dots, a_r \in E$ pour lesquels $E = \langle a_1 \rangle_u \oplus \dots \oplus \langle a_r \rangle_u$.

Partie C – Cas cyclique du théorème d'Erdos

- 6) Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E , $k \in \mathbb{N}^*$ et $c \in E$. On note $\pi(b_k, c)$ l'unique endomorphisme de E défini par les relations $\pi(b_k, c)(b_i) = \begin{cases} c & \text{si } i = k \\ b_i & \text{si } i \neq k \end{cases}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que si $c \in \text{Vect}(b_1, \dots, b_{k-1}, b_{k+1}, \dots, b_n)$, alors $\pi(b_k, c)$ est un projecteur.
- 7) Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose u cyclique, i.e. que $E = \langle a \rangle_u$ pour un certain vecteur non nul $a \in E$. On pose $e_i = u^i(a)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. La famille (e_0, \dots, e_{n-1}) est une base de E d'après 3)b). Grâce au résultat de la question 6), on peut associer à cette base un projecteur $\pi(e_i, c)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et pour toute combinaison linéaire c de $e_0, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_{n-1}$.
- a) Montrer que u est non bijectif si et seulement si $u^n(a)$ est combinaison linéaire de e_1, \dots, e_{n-1} (sans e_0).
On suppose désormais u non bijectif.
 - b) Déterminer un vecteur $c \in E$ pour lequel $u = \pi(e_0, e_1) \dots \pi(e_{n-2}, e_{n-1}) \pi(e_{n-1}, c)$. Comme voulu, u est un produit de projecteurs.

Partie D – Cas général du théorème d'Erdos

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ non bijectif. D'après 5), on peut se donner des vecteurs non nuls $a_1, \dots, a_r \in E$ pour lesquels $E = \langle a_1 \rangle_u \oplus \dots \oplus \langle a_r \rangle_u$, et d'après 7), on peut supposer $r \geq 2$.

- 8) Montrer que l'une au moins des restrictions $u|_{\langle a_1 \rangle_u}, \dots, u|_{\langle a_r \rangle_u}$ n'est pas injective.

On peut ainsi supposer $u|_{\langle a_1 \rangle_u}$ non injective sans perte de généralité et se donner une base $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m_1-1})$ de $\langle a_1 \rangle_u$ pour laquelle $\varepsilon_0 \in \text{Ker} u$. Pour tout $i \in \llbracket 2, r \rrbracket$, on pose ensuite $m_i = \dim \langle a_i \rangle_u$ et $e_j^{(i)} = u^j(a_i)$ pour tout $j \in \llbracket 0, m_i-1 \rrbracket$. D'après 3)b), la famille $(e_j^{(i)})_{0 \leq j \leq m_i-1}$ est une base de $\langle a_i \rangle_u$ pour tout $i \in \llbracket 2, r \rrbracket$.

La concaténation \mathcal{B} des familles $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m_1-1})$ et $(e_j^{(i)})_{\substack{2 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq m_i-1}}$ est alors une base de E adaptée à la décomposition $E = \langle a_1 \rangle_u \oplus \dots \oplus \langle a_r \rangle_u$. Grâce au résultat de la question 6), on peut associer à cette base une vaste collection de projecteurs $\pi(\varepsilon_i, c)$ et $\pi(e_j^{(i)}, c)$ comme en 7).

- 9) On pose finalement $\chi_i = \pi(\varepsilon_0^{(i)}, \varepsilon_1^{(i)}) \dots \pi(\varepsilon_{m_i-2}^{(i)}, \varepsilon_{m_i-1}^{(i)})$ pour tout $i \in \llbracket 2, r \rrbracket$ — en particulier, $\chi_i = \text{Id}_E$ si $m_i = 1$ — puis $\tilde{\chi}_i = \pi(\varepsilon_0, u(\varepsilon_{m_i-1}^{(i)})) \chi_i \pi(\varepsilon_{m_i-1}^{(i)}, \varepsilon_0)$.
 - a) Montrer que $\tilde{\chi}_i$ est un produit de projecteurs pour tout $i \in \llbracket 2, r \rrbracket$ et qu'il coïncide avec u sur $\langle a_i \rangle_u$.
 - b) Montrer que $\tilde{\chi}_2 \dots \tilde{\chi}_r \pi(\varepsilon_0, 0_E)$ et u coïncident en tout vecteur de la famille $(e_j^{(i)})_{\substack{2 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq m_i-1}}$.
 - c) En déduire que u est un produit de projecteurs.

Je croise les doigts pour que la preuve artisanale de cette partie ne soit pas fausse !